Cap. 4 **ESTIMACIÓN** 2017 Proba UTN

① Los siguientes datos corresponden a las temperaturas de unión de los O-rings (°F) en una muestra de prueba de lanzamientos reales del motor de un cohete de un trasbordador espacial

84 49 60 83 66 47 45 70 68 91 65 58 33 53 78 82 55 61 49 70

a) Hallar la media aritmética y la mediana de la muestra

$\boxed{\text{Media aritmética} = 63,35}$ ✓

$m = 20 \rightarrow \text{mediana muestral} = \dfrac{X_{(m/2)} + X_{(m/2+1)}}{2}$ $\qquad \dfrac{m}{2} = 10$

33	45	47	49	49	53	55	58	60	61	65
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

$\rightarrow \text{Med.} = \dfrac{61+65}{2} = 63$

$\boxed{\text{Mediana Muestral} = 63}$

b) ¿Qué indicaría un valor de la media muy superior al de la mediana?

Indicaría que los valores de las muestras desde el N° 10 en adelante, tienen valor significativamente más altos que los primeros

c) Calcular la varianza y desvío estándar muestrales

$\text{Varianza muestral} = \dfrac{\sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})^2}{19 \rightarrow n-1} = \boxed{232,55 = \text{Var. Muestral}}$

$\boxed{\text{Desvío estandar} = 15,25}$

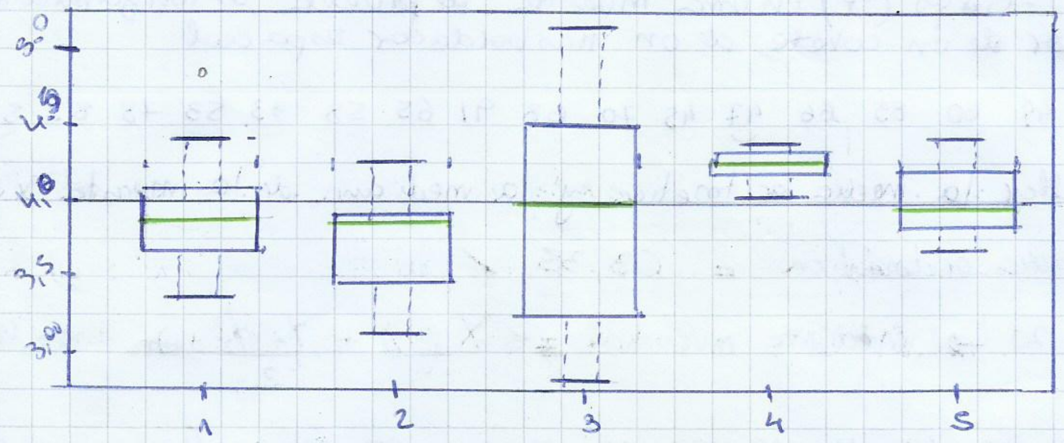
d) Eliminar la observación mayor, repetir los cálculos y comparar los resultados

$\boxed{\text{Media muestral} = 61,89}$ ✓ $m=19 \rightarrow \boxed{\text{Mediana muestral} = X_{10} = 61}$ ✓

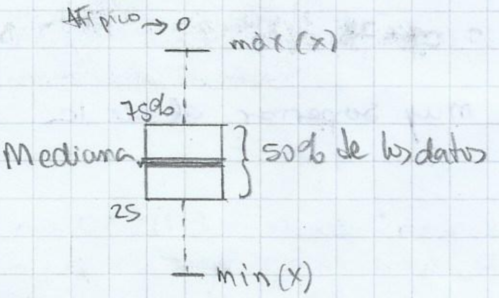
$\boxed{\text{Varianza muestral} = 200,77}$ ✓ $\boxed{\text{desvío muestral} = 14,17}$ ✓

todos los valores disminuyen

2. Se desea elegir un laboratorio para enviar a procesar muestras de agua. Se postulan, para esto, cinco candidatos. Los boxplots correspondientes a 10 mediciones de cada laboratorio de una muestra de agua que contiene un 4% de impurezas se exhiben a continuación:



a) ¿cuáles de los laboratorios tienen sesgo en sus mediciones?



L_1, L_2 y L_4 tienen sesgo

L_3 y L_5 son insesgados

b) Entre los menos sesgados ¿cuál es el más preciso?

El laboratorio L5 es el más preciso

PyE C.4 Estimación

(3) Un circuito funciona con varias resistencias independientes en serie, cada una de las cuales tiene distribución normal con media 20 ohms y varianza 0,36 ohm² $\boxed{Var = \sigma^2}$.

a) Si se instalan 6 de estas resistencias ¿cuál es la prob. de que la resistencia del circuito sobrepase los 118 ohm?

X_i = "capacidad, en ohms, de la i-ésima resistencia" $i \in [1,6]$, $X_i \sim N(20, 0.6)$

Y = "capacidad, en ohms, de 6 resistencias" $Y \sim N(6.20, \sqrt{6}.0,6)$

$$Y \sim N(120, 0.36\sqrt{6}) \rightarrow Z = \frac{Y-\mu}{\sigma} = \frac{Y-120}{0.36\sqrt{6}} \rightarrow Z \sim N(0,1)$$

$$P(Y>118) = 1 - P(Y \leq 118) = 1 - P\left(\frac{Y-120}{0.6\sqrt{6}} \leq \frac{118-120}{0.6\sqrt{6}}\right) =$$

calculadora

$$= 1 - P(Z \leq -1{,}3608) \overset{\uparrow}{=} 1 - 0{,}08678 = \boxed{0{,}9132 = P(Y>118)}$$

b) ¿Cuántas resistencias deberán instalarse de manera que la prob. de de la resistencia total exceda los 200 ohms sea aprox. 0,05?

W = "capacidad, en ohms, de m resistencias" $W \sim N(m20, \sqrt{m}.0,6)$

$$Z = \frac{W - m20}{\sqrt{m}\,0.6} \rightarrow Z \sim N(0,1)$$

$$P(W>200) \cong 0{,}05 \rightarrow P(W \leq 200) \cong 0.95$$

$$P\left(\frac{W-m20}{0.6\sqrt{m}} \leq \frac{200-m20}{0.6\sqrt{m}}\right) = P\left(Z \leq \underbrace{\frac{200-20m}{0.6\sqrt{m}}}\right) = 0.95$$

$$z_{0.95} = 1{,}645$$

$$\rightarrow 1{,}645 = \frac{200-20m}{0.6\sqrt{m}} \rightarrow 0.987\sqrt{m} = 200 - 20m \qquad m>0$$

$$0.987^2 m = 40000 - 8000m + 400m^2$$

$$\rightarrow 400m^2 - 8000{,}974\,m + 40000 = 0 \rightarrow t = 10{,}15$$
$$t = 9{,}84$$

$t = 10{,}15 \rightarrow P(Z \leq \quad) = 0{,}06$

$t = 9{,}84 \rightarrow P(Z \leq \quad) = 0{,}955 \rightarrow m = 9{,}84 \xrightarrow{\text{red.}} \boxed{m \geq 10}$

(4) Una empresa agroalimentaria tiene tres sucursales en cierta región, cada una de ellas manejada por dos empleados. Los sueldos mensuales de estos empleados en miles de unidades monetarias se exhiben en la sig. tabla:

Sucursal	1	1	2	2	3	3
Empleado	1	2	3	4	5	6
Sueldo	19,5	23,8	20,1	23,8	15,6	19,5

a) Se seleccionan al azar dos empleados entre estos seis con reemplazo y se calcula el promedio de sus sueldos.
Hallar la distribución muestral del sueldo medio

Promedios	1	2	3	4	5	6
1	19,5	21,65	19,8	21,65	17,55	19,5
2	21,65	23,8	21,95	23,8	19,70	21,65
3	19,8	21,95	20,1	21,95	17,85	19,8
4	21,65	23,8	21,95	23,8	19,7	21,65
5	17,55	19,7	17,85	19,7	15,6	17,55
6	19,5	21,65	19,8	21,65	17,55	19,5

empl.

$n=36$

$\boxed{\bar{X} = 20,38}$ $\boxed{S = 2,025}$ $\boxed{S^2 = 4,103}$ $\boxed{\text{Mediana } M = 19,8}$

b) Se selecciona una de las 3 suc. al azar y se considera v.a. Z: "promedio de los sueldos de los dos empleados de la misma".
Hallar la distribución de Z

Sucursal →	1	2	3
Promedio →	21,65	21,95	17,55
$P(Z=i)$	1/3	1/3	1/3

$$\boxed{P(Z=21,65) = P(Z=21,95) = P(Z=17,55) = 1/3}$$

c) Compare los resultados de a) y b) con la media y la varianza del sueldo de un empleado elegido al azar de la empresa

—

Estimación

(5) Se supone que el espesor de cierta pintura al aceite (X) en mm tiene distribución Normal. Se realizaron las sig. obs. de espesores de pintura

0.89	0.88	0.88	1.03	1.09	1.12	1.29	1.31
1.48	1.49	1.59	1.62	1.64	1.71	1.76	1.83

a) Calcular a partir de la muestra la media, la varianza, el desvío estándar y la mediana

$n=16$ $\quad \underbrace{0.88}_{1}\ \underbrace{0.88}_{2}\ \underbrace{0.89}_{3}\ \underbrace{1.03}_{4}\ \underbrace{1.09}_{5}\ \underbrace{1.12}_{6}\ \underbrace{1.29}_{7}\ \underbrace{1.31}_{8}\ \underbrace{1.48}_{9}$

mediana muestral $\rightarrow$ n par $\rightarrow \dfrac{X_8 + X_9}{2} = \dfrac{1.31 + 1.48}{2} = \boxed{1,395 = \text{Mediana muestral}}$ ✓

$\boxed{\bar{X} = 1,3506}$ ✓ $\boxed{S = 0,3327}$ ✓ $\boxed{S^2 = 0,1107}$ ✓

b) ¿Cuál/es de estos valores utilizaría para estimar el valor central de los espesores de esta pintura?

$$\boxed{\mu = \bar{X} = 1,35}$$ ✓

c) Si la muestra tuviera tamaño 1000 ¿qué estimador puntual elegiría para la media? ¿En qué basa su elección?

$$\boxed{\bar{X}}$$ ✓

⑥ $\boxed{T}$ Probar que si $X_1, X_2, \dots X_n$ son v.a.i.id. ; con $E(X_i) = \mu$ y $V(X) = \sigma^2$ entonces:

a) $E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = n\mu$

$$\boxed{E(X_1 + X_2 + \dots + X_n)} = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n) =$$

$$= \underbrace{\mu + \mu + \dots + \mu}_{n \text{ elementos}} = \boxed{n\mu}$$

b) $V(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = n\,\sigma^2$

$$\boxed{V(X_1 + X_2 + \dots + X_n)} = V(X_1) + V(X_2) + \dots + V(X_n) =$$

$$= \underbrace{\sigma^2 + \sigma^2 + \dots + \sigma^2}_{n \text{ elementos}} = \boxed{n\,\sigma^2}$$

---

⑦ Una fábrica envasa paquetes de café cuyo peso es una v.a. Normal de media 495 g y desvío estándar 18 g. Los paquetes se venden en caja de 9 unidades. El peso de la caja de cartón es una v.a. normal de media 50 gr y desvío estándar 4 g. Si se selecciona una caja al azar ¿cuál es la prob. de que el peso no supera los 4500 gr.? (considerar los peso de los paquetes como v.a. i)

X_i = "peso, en gramos, de la i-ésima caja" $i \in [1, 9]$ $\qquad X_i \sim N(495, 18)$

Y = "peso, en gramos, de la caja de cartón" $\qquad Y_i \sim N(50, 4)$

$$W = \sum_{i=1}^{9} X_i + Y = X_1 + X_2 + \dots + X_9 + Y$$

$$\mu = E(W) = \underset{i \in [1,9]}{n\,E(X_i)} + E(Y) = 9 \cdot 495 + 50 = \boxed{4505 = \mu_w}$$

$$\sigma^2_w = V(W) = n\,V(X_i) + V(Y) = n\,\sigma_x^2 + \sigma_y^2 = 9 \cdot 18^2 + 4^2 = 2932$$

$$\sigma^2_w = 2932 \rightarrow \boxed{\sigma_w = 54{,}15} \rightarrow \boxed{W \sim N(4505, 54.15)}$$

$$Z = \frac{W - 4505}{54{,}15} \rightarrow Z \sim N(0,1)$$

$$P(W \leq 4500) = P\left(\frac{W - 4505}{54.15} \leq \frac{4500 - 4505}{54.15}\right) = P(Z \leq -0{,}0923) = 0{,}4632$$

$$\boxed{P(W \leq 4500) = 0{,}4632}$$ ✓

PyE C.4 Estimación

(8) En una población determinada, la estatura de una persona adulta tiene un promedio de 165 cm con una desviación estándar de 7 cm

a) Si se toma una muestra aleatoria de 100 personas en esta población calcular la prob. de que la estatura media de la muestra exceda 168 cm.

X_i = "estatura, en cm, de la iésima persona de una pobl. determ" $i \in [1,100]$

$$X_i \sim N(165, 7)$$

con $n = 100$

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{100} X_i}{100} \rightarrow E(\bar{X}) = \mu = 165$$

$\bar{X}$: Promedio entre 100 personas

$$V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{49}{100} = 0{,}49 \rightarrow \sqrt{0{,}49} = 0{,}7$$

$$\boxed{\bar{X} \sim N(165, 0{,}7)}$$

$$Z = \frac{\bar{X} - 165}{0{,}7} \rightarrow Z \sim N(0,1)$$

$$P(\bar{X} > 168) = 1 - P(\bar{X} \leq 168) = 1 - P\left(\frac{\bar{X} - 165}{0{,}7} \leq \frac{168 - 165}{0{,}7}\right) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 4{,}2857) = 1 - 0{,}99999 = \boxed{0{,}00001 = P(\bar{X} > 168)}$$ ✓

b) Si se supone distribución normal de las estaturas, hallar la prob. de que en una muestra de ~~36~~ 31 personas el desvío de la estatura resulte superior a 6 cm.

la profesora sugirió $n=31$ para hacerlo x tabla

X_i con $i \in [1,31]$ $\quad X_i \sim N(165, 7) \rightarrow \overset{n-1}{30}\,\frac{S^2}{7^2} \sim \chi^2_{30}$

$\bar{X}$ con $n = 31 \rightarrow E(\bar{X}) = \mu = 165$

$$\boxed{\frac{30}{49} S^2 \sim \chi^2_{30}}$$

$$P(S > 6) = P(S^2 > 36) = P\left(\frac{30}{49} S^2 > 36 \cdot \frac{30}{49}\right) = \boxed{P(\chi^2_{30} > 22{,}0408) \cong 0{,}85}$$

c) Si llamamos p a la proporción de personas de la población que superan el 1,70 m, hallar la prob. de que dicha proporción en una muestra de tamaño 36 supere el 20%

Y_i = "la iésima persona mide más de 170 cm" $i \in [1,36]$ $\quad Y_i \sim Be(p)$

$$\sum_{i=1}^{36} Y_i \cdot \frac{1}{36} = W = \bar{Y} \rightarrow Y \sim Be(p$$

(9) La pintura para autopista de color amarillo tiene una especificación que recomienda que la varianza del tiempo de secado no supere los 20 min^2. Sabiendo que la distr. del tiempo de secado es aproximadamente normal con varianza 16 min^2:

a) Hallar la prob. de que la varianza del tiempo de secado en una muestra de tamaño 10 exceda los 42,77 min^2

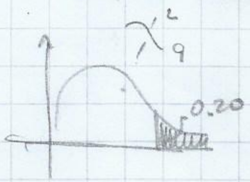
X_i: "tiempo de secado, en minutos, de la pintura amarilla"

$$X_i \overset{a}{\sim} N(\mu, 4) \qquad \to V(X_i) = 16 = \sigma^2 \to \sigma = 4$$

$$(n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1} \xrightarrow{n=10} 9\,\frac{S^2}{4^2} \sim \chi^2_9$$

$$P(S^2 > 42{,}77) = P\left(\frac{9}{4^2} S^2 > \frac{9}{4^2} \cdot 42{,}77\right) = P\left(\chi^2_9 > 24{,}058\right) \cong 0{,}005$$

b) Hallar la variabilidad (S^2) superada por el 20% de las muestras del tamaño 10 de tiempos de secado



$n = 10 \to n-1 = 9$ $\qquad 9 \cdot \frac{S^2}{16} \sim \chi^2_9$

Variab $= S^2$

$$P(S^2 > x) = 0.20 \to P\Big(\underbrace{\frac{9S^2}{16}}_{\chi^2_9} > x \cdot \frac{9}{16}\Big) = 0.20$$

$\hookrightarrow \nu = 9,\ \alpha = 0{,}20 \to x\,\frac{9}{16} = 12{,}242$

$$x = 12{,}242 \cdot \frac{16}{9} = 21{,}7635 = S^2 \to \boxed{S = 4{,}66}$$

8-c

Y_i = "la i-ésima persona mide más de 170 cm" $i \in [1,36]$, $Y_i \sim Be(p)$

$$p = P(X > 170) = 1 - P(X \leq 170) = 1 - P\left(\frac{X-165}{7} \leq \frac{170-165}{7}\right) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 0{,}7143) = 1 - 0{,}7625 = \boxed{0{,}2375 = p}$$

$$\hat{p} = \bar{Y} \Rightarrow E(\hat{p}) = E(\bar{Y}) = 0{,}2375 \quad \frac{n \cdot p}{n}$$

$$V(\hat{p}) = V(\bar{Y}) = p(1-p) = 0{,}1811 \rightarrow \sigma(\hat{p}) = 0{,}42$$

$$\sqrt{n} = 6 \rightarrow \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0{,}07$$

$$P(\hat{p} > 0.2) = 1 - P(\hat{p} \leq 0{,}2) \overset{TCL}{=} 1 - P\left(\frac{\hat{p} - 0{,}2375}{0{,}07} \leq \frac{0{,}2 - 0{,}2375}{0{,}07}\right) =$$

$$= 1 - P(Z \leq -0{,}53) = 1 - 0{,}2960 = 0{,}7039$$

$$\boxed{P(\hat{p} > 0{,}2) = 0{,}7039}$$

(10) En un supermercado se decide redondear el costo de las ventas al entero más cercano. Si en un día se realizan 800 ventas y se supone que el redondeo tiene distribución Uniforme, hallar la probabilidad de que en ese día el supermercado pierda en el redondeo más de \$9

X_i = "diferencia, en pesos, por redondear la i-ésima venta" $i \in [1, 800]$

-0,5 +0,5

Sería el caso de que una venta hubiese sido, x ej, \$ 10,50 → 10 → dif = -0

$E(X_i) = \frac{a+b}{2} = \frac{-0,5+0,5}{0} = \boxed{0 = \mu}$

$V(X_i) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(0,5-(-0,5))^2}{12} = \boxed{\frac{1}{12}} = \frac{\sigma^2}{n}$

$n = 800$

W = "suma de las dif. de las 800 ventas" $\rightarrow W = \sum_{i=1}^{800} X_i$

$W \overset{a}{\sim} N\left(0, \sqrt{\frac{800}{12}}\right) \rightarrow W \overset{(a)}{\sim} N(0, 8.165)$

$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{800}{12}}$

$\mu = 0$

$Z = \frac{W}{\sqrt{800/12}} \rightarrow Z \overset{a}{\sim} N(0,1)$

$P(W>9) = 1 - P(W \leq 9) = 1 - P\left(\frac{W}{8.165} \leq \frac{9}{8,165}\right) =$

$= 1 - P(Z \leq 1,1023) = 1 - 0,86483 = 0,1352$

$$\boxed{P(W>9) = 0,1352}$$ ✓

(11) La primera tarea en un curso introductorio de programación por computadora implica correr un breve programa. Si la experiencia indica que un 40% de todos los estudiantes principiantes no cometerán errores tipo gráficos, calcular la prob. aproximada de que en un grupo de 80 estudiantes:

a) por lo menos el 35% no cometa errores

X_i = "el iésimo estudiante no comete errores" $\qquad X_i \sim Be(p)$

$p = 0.4$

$R(X_i) = \{0,1\} \qquad i \in [1, 80] \qquad X_i \sim Be(0,4)$

$n = 80 \qquad E(X_i) = \overset{Be}{\overset{\downarrow}{p}} = 0.40 \rightarrow \boxed{\mu = 0.40}$

$V(X_i) = p(1-p) = 0,4 \times 0,6 = 0,24 \rightarrow \sigma = 0,49$

estimador : $\hat{p} \qquad \hat{p} \overset{a}{\sim} N(\mu, \sigma/\sqrt{n}) \qquad \sqrt{n} = 8,944$

$\hat{p} \overset{a}{\sim} N(0.4, 0.055) \qquad \sigma/\sqrt{n} = 0,055$

$$Z = \frac{\hat{p} - 0.4}{0.055} \rightarrow Z \sim N(0,1)$$

$$P(\hat{p} \geq 0.35) = 1 - P(\hat{p} < 0.35) = 1 - P\left(\frac{\hat{p} - 0,4}{0,055} < \frac{0.35 - 0.4}{0,055}\right) =$$

x continuidad

$$= 1 - P(Z \leq -0,909) = 1 - 0,18165 = 0,8184$$

$$\boxed{P(\hat{p} \geq 0,35) \cong 0,8184}$$

b) entre el 45% y el 55% cometen errores

Y_i = "el iésimo estudiante comete errores" $\qquad Y_i \sim Be(0,60)$

$n = 80 \qquad E(Y_i) = 0,60 = \mu \qquad \hat{p} \overset{(a)}{\sim} N(\mu, \sigma/\sqrt{n})$

$V(Y_i) = 0,6 \times 0,4 = 0,24$

$\hat{p} \overset{a}{\sim} N(0.6, 0.055) \qquad Z = \dfrac{\hat{p} - 0.6}{0.055} \rightarrow Z \overset{a}{\sim} N(0,1)$

$$P(0.45 \leq \hat{p} \leq 0.55) \overset{a}{=} P\left(\frac{0.45 - 0.6}{0.055} \leq \frac{\hat{p} - 0.6}{0.055} \leq \frac{0.55 - 0.6}{0.055}\right) =$$

$$= P(-2,7272 \leq Z \leq -0,909) = P(Z \leq -0,909) - P(Z < -2,7272) =$$

$$\overset{cont}{=} P(Z \leq -0,909) - P(Z \leq -2,7272) \doteq 0,18165 - 0,0003 \cong 0,1785$$

$$\boxed{P(0.45 \leq \hat{p} \leq 0.55) \cong 0,1785}$$

Estimación

(12) Se examinaron 180 piezas recién fabricadas y se registra el número de imperfecciones por pieza. Sería ideal que las piezas fabricadas no tuvieran imperfecciones. Sea X: "el número de imperfecciones en una pieza selecc. al azar" y supongamos que X tiene distribución Poisson de parámetro λ. Se obtuvieron las sig. obs.

# imperfecciones por pieza	0	1	2	3	4	5	6	7
Frecuencia obs.	18	47	52	40	13	7	2	1

a) Hallar las expresiones de los estimadores de momento y de máxima verosimilitud correspondiente al valor de parámetro λ desconocido

$$\hat{\lambda}_{mom} = \hat{\lambda}_{max\ ver.} = \bar{X} \qquad \boxed{\lambda t = \mu}$$

$$\bar{X} = (18 \times 0 + 47 \times 1 + 52 \times 2 + 40 \times 3 + 13 \times 4 + 7 \times 5 + 2 \times 6 + 1 \times 7) / 180 =$$

$$= 377/180 = 2{,}09 \rightarrow \boxed{\hat{\lambda}_{mom} = \hat{\lambda}_{mv} = \bar{X} = 2{,}09}$$

$\bar{X} = \hat{\mu}$

b) Analizar si estos estimadores son insesgados

Es insesgado si $E(\hat{\lambda}) - \lambda = 0$ $\quad \hat{\lambda}$

$$E(\hat{\lambda}) = E(\bar{X}) = \lambda \rightarrow E(\hat{\lambda}) - \lambda = \lambda - \lambda = 0 \rightarrow \boxed{\text{es insesgado}}$$

c) Con la estimación lograda, aproximar el valor de $P(X<4)$

$$P(X<4) \overset{\text{Poisson}}{\cong} P(X \leq 3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) =$$

$$= 0{,}8405 \rightarrow \boxed{P(X<4) \cong 0{,}8405}$$

$$P(X=x) = e^{-\mu} \frac{\mu^x}{x!}$$

$$P(X=0) = e^{-2{,}09} \frac{2{,}09^0}{0!} = 0{,}1236 \qquad P(X=2) = e^{-2{,}09} \cdot \frac{2{,}09^2}{2!} = 0{,}2701$$

$$P(X=1) = e^{-2{,}09} \frac{2{,}09^1}{1!} = 0{,}2585 \qquad P(X=3) = e^{-2{,}90} \frac{2{,}09^3}{3!} = 0{,}1881$$

(13) Sean. X_1, X_2, X_3, X_4 una m.a de tamaño 4 de una población exponencial de parámetro α desconocido. Considera $f(x) = \alpha e^{-\alpha x}$

Se proponen los sig. estadísticos para estimar el valor desconocido α (tener en cuenta el valor esperado de esta variable)

- $T_1 = \frac{1}{6}(X_1+X_2) + \frac{1}{3}(X_3+X_4)$
- $T_2 = \frac{1}{5}(X_1+2X_2+3X_3+4X_4)$
- $T_3 = \frac{1}{4}(X_1+X_2+X_3+X_4)$

a) Seleccionar el o los estimadores insesgados entre los propuestos

insesgado $\rightarrow E(\hat{\theta}) - \theta = 0$ $\qquad X_i \sim E(\lambda)$ $\quad \boxed{\alpha = \lambda}$

- $E(T_1) - \lambda = E\left(\frac{1}{6}(X_1+X_2) + \frac{1}{3}(X_3+X_4)\right) - \lambda =$

$= \left[\frac{1}{6}E(X_1+X_2) + \frac{1}{3}E(X_3+X_4)\right] - \lambda =$

$E(X_i) = \lambda$ $\quad = \left[\frac{1}{6}E(X_1) + \frac{1}{6}E(X_2) + \frac{1}{3}E(X_3) + \frac{1}{3}E(X_4)\right] - \lambda =$

$\forall i \in [1,4]$ $\quad = \underbrace{\frac{1}{6}\lambda + \frac{1}{6}\lambda + \frac{1}{3}\lambda + \frac{1}{3}\lambda}_{\lambda} - \lambda = \lambda - \lambda = 0 \rightarrow$ insesgado

$\boxed{\text{con } T_1,\ \hat{\lambda} \text{ es insesgado}}$

- $E(T_2) - \lambda = E\left(\frac{1}{5}(X_1+2X_2+3X_3+4X_4)\right) - \lambda =$

$= \frac{1}{5}E(X_1) + \frac{2}{5}E(X_2) + \frac{3}{5}E(X_3) + \frac{4}{5}E(X_4) - \lambda =$

$E(X_i) = \lambda$
$\forall i \in [1,4]$ $\quad = \frac{1}{5}\lambda + \frac{2}{5}\lambda + \frac{3}{5}\lambda + \frac{4}{5}\lambda - \lambda = 2\lambda - \lambda = \lambda$

$\boxed{\text{con } T_2,\ \hat{\lambda} \text{ NO es insesgado}}$

- $E(T_3) - \lambda = E\left(\frac{1}{4}(X_1+X_2+X_3+X_4)\right) - \lambda =$

$= \frac{1}{4}\left(E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + E(X_4)\right) - \lambda =$

$= \frac{1}{4}(\overbrace{\lambda+\lambda+\lambda+\lambda}^{4\lambda}) - \lambda = \lambda - \lambda = 0$

$\boxed{\text{con } T_3,\ \hat{\lambda} \text{ es insesgado}}$

13) b) Elegir el de menor varianza entre los seleccionados en a).

$$t_1: \; V(\hat{\lambda}) = V\left(\frac{1}{6}(X_1+X_2) + \frac{1}{3}(X_3+X_4)\right) =$$

$$= V\left(\frac{1}{6}(X_1+X_2)\right) + V\left(\frac{1}{3}(X_3+X_4)\right) =$$

$$= \frac{1}{36}\left[V(X_1+X_2)\right] + \frac{1}{9}\left[V(X_3+X_4)\right] =$$

$$= \frac{1}{36}V(X_1) + \frac{1}{36}V(X_2) + \frac{1}{9}V(X_3) + \frac{1}{9}V(X_3) =$$

$X_i \sim \mathcal{E}(\lambda)$

$\rightarrow V(X_i) = \frac{1}{\lambda^2}$

$\forall i \in [1,4]$

$$= \frac{1}{36\lambda^2} + \frac{1}{36\lambda^2} + \frac{1}{9\lambda^2} + \frac{1}{9\lambda^2} = \frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{36}_{18}\lambda^2} + \frac{2}{9\lambda^2} =$$

$$= \frac{1+4}{18\lambda^2} = \boxed{\frac{5}{18\lambda^2} = V(\hat{\lambda}) \text{ con } t_1}$$

$$T_2: \; V(\hat{\lambda}) = V\left(\frac{1}{4}(X_1+X_2+X_3+X_4)\right) = \frac{1}{16}\left[V(X_1)+V(X_2)+V(X_3)+V(X_4)\right] =$$

$$= \frac{1}{16}\left(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2}\right) = \frac{1}{\cancel{16}_{4}} \cdot \frac{\cancel{4}^{1}}{\lambda^2} = \boxed{\frac{1}{4\lambda^2} \text{ con } T_3}$$

$\frac{1}{4} < \frac{5}{18} \rightarrow$ $\boxed{\text{con } t_3,\ \hat{\lambda} \text{ tiene menor Varianza}}$

c) Ver si el error cuadrático medio del estimador elegido en b) es mínimo

$$ECM(\hat{\lambda}) = E\left((\hat{\lambda}-\lambda)^2\right) = V(\hat{\lambda}) - \underbrace{\left(E(\hat{\lambda})-\lambda\right)^2}_{=0 \rightarrow \text{ es insesgado}} = V(\hat{\lambda})$$

$ECM(\hat{\lambda})$ en t_3 $= V(\hat{\lambda}) = \frac{1}{4\lambda^2}$ → es el de menor varianza con respecto a t_1 (punto b)

$\therefore$ es mínimo

(14) $\boxed{T}$ Verificar que el error cuadrático medio de un estimador es la suma de la varianza del mismo y el cuadrado de su sesgo.

$$\boxed{ECM(\hat{\theta})} = E\left((\hat{\theta}-\theta)^2\right) = E(\hat{\theta}^2 - 2\hat{\theta}\theta + \theta^2) =$$

$$= E(\hat{\theta}^2) - 2E(\hat{\theta}\theta) + E(\theta^2) = \quad \leftarrow \theta \in \mathbb{R}$$

Sumo y resto $E(\hat{\theta})^2$

$$= E(\hat{\theta}^2) - \underbrace{E(\hat{\theta})^2 + E(\hat{\theta})^2}_{0} - 2\theta E(\hat{\theta}) + \theta^2 =$$

$$= \underbrace{E(\hat{\theta}^2) - E(\theta)^2}_{\text{varianza}} + \underbrace{(E(\hat{\theta}) - \theta)^2}_{\text{sesgo}} =$$

$$= \boxed{V(\hat{\theta}) + (E(\hat{\theta}) - \theta)^2}$$

(15) $\boxed{T}$ Sean $X_1, \ldots X_n$ una m.a. de una población de la que se sabe que $E(X_i) = \mu$ y $V(X_i) = \sigma^2$.

Demostrar que $\bar{X}^2$ no es un estimador insesgado de μ^2

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \qquad E(\bar{X}) = \mu \qquad V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$V(\bar{X}) = E(\bar{X}^2) - E(\bar{X})^2 \rightarrow E(\bar{X}^2) = V(\bar{X}) + E(\bar{X})^2 =$$

$$= \boxed{\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2 = E(\bar{X}^2)}$$

$$\rightarrow E(\bar{X}^2) - \mu^2 = \frac{\sigma}{n} + \mu^2 - \mu^2 = \frac{\sigma}{n} \neq 0$$

$\therefore$ No es insesgado

PyE UTN C.4 Estimación

(16) Se denota con X la proporción de tiempo que un estudiante seleccionado al azar, emplea trabajando en cierta prueba de aptitud. Suponiendo que X tiene una distribución cuya función de densidad está dada por

$$f(x) = \begin{cases} (\theta+1)x^{\theta} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Obtener el estimador de momentos de θ

$$\bar{X} = E(X)$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx = \int_0^1 x(\theta+1)x^{\theta}\, dx = \theta+1 \int_0^1 x^{\theta+1}\, dx =$$

$$= (\theta+1) \cdot \left. \frac{x^{\theta+2}}{\theta+2} \right|_0^1 = \boxed{\frac{\theta+1}{\theta+2} = \bar{X}}$$

Entonces:

$$\hat{\theta}+1 = \bar{X}(\hat{\theta}+2) = \hat{\theta}\bar{X} + 2\bar{X} \rightarrow \hat{\theta} - \hat{\theta}\bar{X} = 2\bar{X} - 1$$

$$\hat{\theta}(1-\bar{X}) = 2\bar{X} - 1$$

$$\boxed{\hat{\theta} = \frac{2\bar{X}-1}{1-\bar{X}}}$$

b) Se toma una muestra aleatoria de 12 estudiantes, obteniendo las siguientes observaciones:

0.92 0.79 0.90 0.69 0.86 0.49 0.73 0.97 0.94 0.77 0.93 0.75

Calcular la estimación de θ para esta muestra

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{12} x_i}{12} = 0.8116$$

$$\rightarrow \hat{\theta} = \frac{2 \times 0.8116 - 1}{1 - 0.8116} = 3{,}3097$$

$$\boxed{\hat{\theta} = 3{,}3097}$$

(17) Se quiere estimar el valor medio de las horas de estudio semanales de los alumnos recién ingresados a la UTN. Se toma una muestra de 100 alumnos y se obtiene un promedio de 4 hs 20 min. Sabiendo que la distribución de estos tiempos es aproximadamente Normal con desvío de 55 min,

a) construir un intervalo de confianza de nivel 90%, 95% y 99% para el valor medio de las horas semanales de estudio

X_i: "tiempo, en minutos, de estudio de los alumnos ingresantes" $X_i \sim N(\mu, 55)$ $i \in [1, 100]$

μ desconocido, σ conocido y distr. N. $\bar{X} = 260$

$\bar{X} = 260$

$\frac{\sigma}{\sqrt{m}} = \frac{55}{10}$

$$IC_{1-\alpha}(\mu) = \left[-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{m}} + \bar{X} \, , \, z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{m}} + \bar{X} \right]$$

$90\% \rightarrow 1-\alpha = 0.9 \rightarrow \alpha = 0.10 \rightarrow \boxed{1-\frac{\alpha}{2} = 0.95} \rightarrow z_{0.95} = 1{,}645$

$$\boxed{IC_{0.90}(\mu) = [250.95, 269.05]}$$ ✓

$95\% \rightarrow 1-\alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0.975 \rightarrow z_{0.975} = 1{,}96$

$$\boxed{IC_{0.95}(\mu) = [249.22, 270.78]}$$ ✓

$99\% \rightarrow 1-\alpha = 0{,}99 \rightarrow \alpha = 0{,}01 \rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0{,}995 \rightarrow z_{0{,}995} = 2{,}575$

$$\boxed{IC_{0.99}(\mu) = [245.84, 274.16]}$$ ✓

b) comparar las longitudes de los intervalos construidos en a) y dar una conclusión

$$\boxed{IC_{0.90}(\mu) < IC_{0.95}(\mu) < IC_{0.99}(\mu)}$$

Cuando mayor sea el nivel de confianza, más GRANDE es el intervalo

PyE UTN C.9 Estimación

(18) Se quiere estimar la estatura promedio en la población que se supone tiene una distribución Normal con $\sigma = 4$ cm. Se toma una muestra de 144 personas y se obtiene que el promedio muestral es de 168 cm.

X_i: "estatura en cm tomada a la persona i-ésima" $i \in [1, 144]$ $X_i \sim N(\mu, 4)$

$\sigma = 4$ $\bar{X} = 168$ $n = 144 \rightarrow \sqrt{n} = 12$

a) Calcular el intervalo de confianza para la altura promedio de la población con un nivel de confianza del 98%

nivel de confianza $= 98\% \rightarrow 1-\alpha = 0.98 \rightarrow \alpha = 0{,}02 \rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0{,}99 \rightarrow z_{0.99} = 2{,}33$

$$IC_{0.98}(\mu) = \left[-z_{0.98} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \bar{X} \; , \; z_{0.98} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \bar{X}\right]$$

$$\boxed{IC_{0.98} = [167.22 \; , \; 168{,}78]}$$ ✓

b) ¿De qué tamaño debería ser la muestra para mantener el mismo error muestral (que el obtenido en a)) pero con un nivel de confianza del 95%

$1-\alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0{,}05 \rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0.975 \rightarrow z_{0.975} = 1{,}96$

$n = ?$

$$167.22 = -z_{0.95} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \bar{X} = -1{,}96 \cdot \frac{4}{\sqrt{n}} + 168$$

$$1.96 \times \frac{4}{\sqrt{n}} = 168 - 167.22 = 0.78$$

$$\frac{7.84}{0.78} = \sqrt{n} \rightarrow n = 101{,}02$$

$$\boxed{n = 101}$$

En las respuestas de la guía dice $n = 102$, pero con $n = 101$ da el mismo intervalo

(19) $\boxed{T}$ Supongamos que a partir de una m.a. $X_1, X_2 \dots X_{100}$ donde X_i es el tiempo de duración de cierto procedimiento que tiene distribución Normal con media de 20 minutos.
Se construyó un intervalo de confianza para la varianza poblacional de nivel 0.98 y este intervalo resultó: $[5.28, 10.2]\ min^2$.
Indicar si las sig. afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando adecuadamente en cada caso:

a) La probabilidad de que σ^2 se encuentre en 5,28 y 10,2 es de 98% (F)

σ es un parámetro, no tiene probabilidad asociada

b) Si en lugar de 100 observaciones se hubieran tomado 1000 y se hubiera construido un intervalo de confianza de nivel 0.98 este último con certeza habría resultado incluido en [5,28, 10,2]

(F) Con 1000 observaciones el intervalo es más preciso pero no es garantía que esté incluido en el intervalo del enunciado
Con 1000 observ, el IC podría haber sido, por ejemplo, [8, 10.3] y este intervalo no está incluido en el anterior

c) Si se tomaran muchas muestras independientes de tamaño 100 y para c/u de ellas se calculara un intervalo de confianza con el mismo procedimiento, alrededor del 98% de estos intervalos contendrían a σ^2

(V) Es la definición de intervalo de confianza

d) Si se duplica el tamaño de la muestra la longitud del intervalo se reduciría a la mitad

(F) Si n aumenta, el intervalo se reduce pero no necesariamente en la misma proporción en que aumenta n

e) Si se tomaran muchas muestras independientes de tamaño 100 los promedios muestrales de las mismas estarían contenidos en el intervalo $\left[20 - 1{,}96 \times \frac{\sqrt{5{,}28}}{10}, 20 + 1{,}96 \times \frac{\sqrt{10{,}2}}{10}\right]$

(F) $IC_{0.98}(\mu) = \left[\bar{X} - t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}\right]$

S es el mismo en los dos extremos, no cambia y en el enunciado S varía

PyE UTN C.4 Estimación

(20) Un artículo de la revista American Ceramic Society Bulletin contiene información acerca de la distribución de las resistencias a la fractura, en MPa, de ciertas barras de cerámica quemadas en determinado horno. Se sabe que tienen distribución Normal y que el desvío poblacional es $\sigma = 3{,}73$ MPa. Una muestra de tamaño $n=121$ arrojó un promedio $\bar{X} = 89{,}10$ MPa.

a) Calcular un intervalo de confianza del 95% para la resistencia real promedio

X_i: "resistencia, en MPa, de la iésima barra antes de quebrarse"

$i \in [1, 121]$ $\quad X_i \sim N(\mu, 3{,}73)$ $\quad n=121$ $\quad \bar{X} = 89{,}10$

$\%: 95$, $\alpha = 0{,}05$, $\frac{\alpha}{2} = 0{,}025$, $1-\frac{\alpha}{2} = 0.975$, $z_{0.975} = 1{,}96$

$$IC_{0.95}(\mu) = \left[-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \bar{X},\ z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \bar{X}\right] =$$

$$= \left[-1.96 \times \frac{3.73}{\sqrt{121}} + 89{,}10,\ 1{,}96 \times \frac{3.73}{\sqrt{121}} + 89{,}10\right] = [88{,}43,\ 89{,}76]$$

$$\boxed{IC_{0.95}(\mu) = [88.43,\ 89.76]}$$

b) ¿Cómo se modificaría este intervalo si se desconociera la varianza poblacional y la muestra arrojara una desviación estándar de 4.2 MPa?

$X_i \sim N(\mu, \sigma)$ varianza desconocida $\quad n=121$, $S = 4{,}2$, $\bar{X} = 89{,}10$

$$1-\alpha = P\left(-t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \leq \underbrace{\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}}_{\sim t_{n-1}} \leq t_{n-1,\frac{\alpha}{2}}\right)$$

$\to t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} = t_{120,0.025}$

$t_{120,0.025} = 1{,}98$

$$IC_{0.95}(\mu) = \left[\bar{X} - t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}},\ \bar{X} + t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}\right] =$$

$$= \left[89{,}10 - 1{,}98 \cdot \frac{4{,}2}{\sqrt{121}},\ 89{,}10 + 1.98 \times \frac{4{,}2}{\sqrt{121}}\right] = [88{,}34,\ 89.85]$$

$$\boxed{IC_{0.95}(\mu) = [88{,}34,\ 89.95]}$$

aumenta levemente el intervalo pero es muy aproximado

(21) Un artículo del Journal of Sports Science expone un intervalo de confianza para el promedio del nivel de hemoglobina en los jugadores de hockey sobre el hielo (en g/dl) en la olimpíada de Canadá de 20 jugadores, fue estimado con un 95% de confianza, obteniéndose el siguiente intervalo:

IC = [15,01 , 15,59] g/dl

a) Indicar los valores de $\bar{x}$ y s para esta muestra. Suponga que el nivel de hemoglobina de los jugadores de hockey sobre hielo en la olimpíada de Canadá sigue una distribución Normal

X_i: "nivel de hemoglobina, en g/dl, del i'ésimo jugador"

$i \in [1,20]$ $\quad X_i \sim N(\mu, \sigma)$ con $\mu = ?$ y $\sigma = ?$

$1-\alpha = 0{,}95 \to \alpha = 0{,}05 \to \frac{\alpha}{2} = 0{,}025$ $\quad n = 20 \to n-1 = 19$

$\to t_{19,0.025} = 2{,}093$

$$1-\alpha = P\left(-t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \le \underbrace{\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}}_{\sim t_{n-1}} \le t_{n-1,\frac{\alpha}{2}}\right)$$

$$IC_{0.95}(\mu) = \left[-t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} + \bar{X} \, , \, t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} + \bar{X}\right] =$$

$$= \left[-2{,}093 \cdot \frac{S}{\sqrt{20}} + \bar{X} \, , \, 2{,}093 \cdot \frac{S}{\sqrt{20}} + \bar{X}\right] = [15{,}01 \, , \, 15{,}59]$$

$$\to \begin{cases} -2{,}093 \frac{S}{\sqrt{20}} + \bar{X} = 15{,}01 \to \bar{X} = 15{,}01 + \frac{2{,}093}{\sqrt{20}} S \\ 2{,}093 \frac{S}{\sqrt{20}} + X = 15{,}59 \to \bar{X} = 15{,}59 - \frac{2{,}093}{\sqrt{20}} S \end{cases}$$

$$\to 15{,}01 + \frac{2{,}093}{\sqrt{20}} S = 15{,}59 \;\; \frac{2{,}093}{\sqrt{20}} 20 \to \overbrace{15{,}59 - 15{,}01}^{0{,}58} = 2 \times \frac{2{,}093}{\sqrt{20}} S$$

$$\to \boxed{S = 0{,}6196} \to \bar{X} = 15{,}01 + \frac{2{,}093}{\sqrt{20}} \cdot 0{,}6196 = \boxed{15{,}30 = \bar{X}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} S = 0{,}6196 \\ \bar{X} = 15{,}30 \end{array}}$$

(b) Si se conociera la varianza poblacional y fuera de 0,36 $(g/dl)^2$ ¿cuál sería el nivel de confianza del intervalo construido?

$\sigma^2 = 0{,}36 \rightarrow \sigma = 0{,}6 \qquad \bar{X} = 15{,}30 \qquad n = 20$

$$IC_{(1-\alpha)}(\mu) = \left[-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \bar{X},\ z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \bar{X}\right] =$$

$$= \left[-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{0{,}6}{\sqrt{20}} + 15{,}30,\ z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{0{,}6}{\sqrt{20}} + \bar{X}\right] =$$

$$= [\ 15{,}01 \ ,\ 15{,}59\ ]$$

$$\rightarrow -z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{0{,}6}{\sqrt{20}} + 15{,}30 = 15{,}01$$

$$15{,}30 - 15{,}01 = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{0{,}6}{\sqrt{20}}$$

$$\frac{\sqrt{20} \cdot 0{,}29}{0{,}6} = z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 2{,}1615 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}98467$$

$$0{,}01533 = \frac{\alpha}{2}$$

$$0{,}03066 = \alpha$$

$$\rightarrow \boxed{1 - \alpha = 0{,}9693} \checkmark$$

(22) La resistencia a la rotura, expresada en kg de 12 ejemplares de cuerda es de 280, 242, 270, 285, 273, 275, 266, 257, 285, 274, 258, 264. Estimar la resistencia media mediante un intervalo de confianza de nivel 0.95 suponiendo distr. Normal

X_i = "resistencia a la rotura, expresada en kg" $i \in [1,12]$ $X \sim N(\mu, \sigma)$

$\bar{X} = 269{,}08 \to S = 12{,}57$ $1-\alpha = 0{,}95 \to \alpha = 0{,}05$ $\frac{\alpha}{2} = 0{,}025$

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{m}}} \sim t_{m-1} \to \frac{\bar{X}-\mu}{12{,}57/3{,}46} = \boxed{\frac{\bar{X}-\mu}{3{,}6286} \sim t_{11}} \to t_{11,\,0.025} = 2{,}201$$

$$IC_{0.95}(\mu) = \left[-t_{11,\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{m}} + \bar{X} \;,\; t_{11,\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{m}} + \bar{X}\right] =$$

$$= \left[\overset{-2{,}201}{-t_{11,0.025}} \cdot \frac{12{,}57}{\sqrt{12}} + 269{,}08 \;,\; +\overset{2{,}201}{t_{11,0.025}} \frac{12{,}57}{\sqrt{12}} + 269{,}08\right] =$$

$$= \boxed{[261{,}09 \;;\; 277{,}06] = IC_{0.95}(\mu)}$$

---

(23) Se tomó una muestra de $m = 31$ resistencias eléctricas resultando la desviación estándar muestral de las lecturas $S = 2{,}81$ ohm. Suponiendo normalidad, en la distribución de las resistencias hallar un IC de 95% para σ.

$m = 31$ $S = 2{,}81 \to S^2 = 7{,}896$ $X \sim N(\mu, \sigma)$ $(m-1)\frac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{m-1}$

$1-\alpha = 0{,}95 \to \alpha = 0{,}05 \to \frac{\alpha}{2} = 0{,}025$ $30 \cdot \frac{7{,}8961}{\sigma^2} \sim \chi^2_{30}$

$1-\frac{\alpha}{2} = 0{,}975$

$$IC_{0.95}(\sigma) = \left[\sqrt{\frac{(m-1)S^2}{\chi^2_{m-1,\frac{\alpha}{2}}}} \;,\; \sqrt{\frac{(m-1)S^2}{\chi^2_{m-1,1-\frac{\alpha}{2}}}}\right] = \left[\sqrt{\frac{30 \cdot S^2}{\chi_{30,0.025}}} \;,\; \sqrt{\frac{30\, S^2}{\chi_{30,0.975}}}\right] =$$

$$= \left[\sqrt{\frac{30 \cdot 7{,}896}{46{,}979}} \;,\; \sqrt{\frac{30 \times 7{,}896}{16{,}791}}\right] = \left[\sqrt{5{,}0422} \;,\; \sqrt{14{,}10}\right] =$$

$$= \boxed{[2{,}25 \;;\; 3{,}76] = IC_{0.95}(\sigma)}$$

la profesora sugirió cambiar a $m = 31$ para usar la tabla

PyE UTN C.4 2017

(24) Se midió la altura de un río en un punto geográfico dado (en m) durante 20 días al azar del verano, obteniéndose los sig. valores en cm:

69,5	71,9	72,6	73,1	73,3	73,5	75,5	75,7	75,8	76,1
79,7	79,5	80,1	82,6	83,7	92,7	78,0	77,9	78,1	79,6

a) ¿qué condiciones se necesitan para que resulte válida la construcción de un IC. para la varianza poblacional?

Distribución normal e independencia de las observaciones

b) Construir un IC de 99% para la desviación estandar de la distribución de la altura de este río en verano.

IC de 0,99 $\rightarrow 1-\alpha = 0.99 \Rightarrow \alpha = 0,01 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,005$ $n=20$

$\bar{X} = 77,435$ $S = 5,142$ $(n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1} \Rightarrow \frac{19 \cdot 5,142}{\sigma^2} \sim \chi^2_{19}$

$$IC_{0,99}(\sigma) = \left[\sqrt{\frac{(n-1) \cdot S^2}{\chi^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}}}}, \sqrt{\frac{(n-1)}{\chi^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}}}\right] =$$

$$= \left[\sqrt{\frac{19 \cdot 5,142^2}{\chi^2_{19,\,0.005}}}, \sqrt{\frac{19 \cdot 5,142^2}{\chi^2_{19,\,0995}}}\right] =$$

$$= \left[\sqrt{\frac{502,36}{38,582}}, \sqrt{\frac{502,36}{6,844}}\right] = [3,608 ; 8,567]$$

$$\boxed{IC_{099}(\sigma) = [3,60 ; 8,57]}$$ ✓

25) Se quiere estimar la proporción de personas que han visto una cierta obra de teatro en cartel. ¿Qué tamaño de muestra se deberá tomar para asegurar un nivel de confianza del 99% y un margen de error de 0,02? Para el tamaño de muestra obtenido, hallar el intervalo de confianza para la proporción en cuestión, asumiendo que la proporción muestral es de 0,35. ¿Se logró el error objetivo?

X_i = "la i-ésima persona vio la obra" $i \in \mathbb{N}$, $[0, n]$ hallar n (supongo mayor que 30)

$R(X) = \{0,1\}$ $\quad X_i \sim Be(p)$

$\mu = E(X_i) = p \qquad \sigma^2 = V(X_i) = p(1-p) \qquad \dfrac{\hat{p}-p}{\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$ x TCL

$1-\alpha = 0.99 \rightarrow \alpha = 0{,}01 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0{,}005 \rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0{,}995$

$\boxed{\hat{p} \text{ NO es DATO}}$ $\qquad z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0,995} = 2{,}575$

tomo $\hat{p} = 0.5$ (caso + desfavorable)

$$IC_{\substack{0,99\\ \text{aprox}}}(p) = \left[\hat{p} - z_{0,995} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\ \hat{p} + z_{0,995}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right] =$$

$$= \left[0{,}35 - 2{,}575\sqrt{\frac{0{,}5 \times 0{,}5}{n}},\ 0{,}35 + 2{,}575\sqrt{\frac{0{,}5 \times 0{,}5}{n}}\right]$$

el error es: $z_{0,995}\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \rightarrow$

$$\rightarrow 0{,}02 = 2{,}576\sqrt{\frac{0{,}5^2}{n}} \rightarrow \frac{0{,}02}{2{,}576} = \frac{0{,}5}{\sqrt{n}}$$

$$\sqrt{n} = \frac{0{,}5 \times 2{,}576}{0{,}02} = 64{,}4$$

$$n = 4147{,}36 \rightarrow \boxed{n = 4148}$$

ahora tomo $\hat{p} = 0{,}35$ (enunciado)

$$IC_{0,99}(p) = \left[0{,}35 - \underset{2,576}{z_{0,995}}\sqrt{\frac{0{,}35 \times 0{,}65}{4148}},\ 0{,}35 + z_{0,995}\sqrt{\frac{0{,}35 \times 0{,}65}{4148}}\right] =$$

$$= \boxed{[0{,}3309\ ;\ 0{,}3690] = IC_{99}(p)}$$

$$\text{error} = \frac{0{,}369 - 0{,}3309}{2} = 0{,}019 < 0{,}2 \rightarrow \text{se logró el error objetivo}$$

(26) En una muestra de 81 piezas de tela 'modal' se obtuvo una elongación media muestral de 8,17% y un desvío estándar muestral de 1,42%. Además la tercera parte de las telas observadas tuvo elongaciones superiores a 8,4. Suponiendo que la elongación sigue una distribución Normal, estimar mediante un intervalo del 95% de confianza:

a) el verdadero valor medio de elongación μ

X_i: "elongación de la i-ésima pieza, en %" $i \in [1, 81]$ $\quad X_i \sim N(\mu, \sigma)$

$\bar{X} = 8,17$, $S = 1,42$, $1-\alpha = 0.95 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025 \xrightarrow{n=81} t_{80,\,0.025} =$

σ desconocido $\quad X_i \sim N(\mu, \sigma) \qquad \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$

$n = 81$

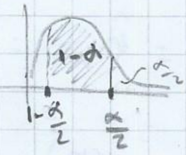
$$IC_{0.95}(\mu) = \left[\bar{X} - t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}},\ \bar{X} + t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}\right] =$$

$$= \left[8,17 - \overbrace{t_{80,0,025}}^{\sim 1,99} \cdot \frac{1,42}{9},\ 8,17 + 1,99 \cdot \frac{1,42}{9}\right] = [7.85, 8.48]$$

$$\boxed{IC_{0.95}(\mu) = [7.85, 8.48]}$$ ✓

b) el desvío estándar poblacional de la elongación σ

$$(n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1} \rightarrow \overbrace{80 \cdot \frac{1,42^2}{\sigma^2}}^{161,31} \sim \chi^2_{80}$$



$$IC_{0.95}(\sigma) = \left[\sqrt{\frac{S^2(n-1)}{\chi^2_{80,\underbrace{\frac{\alpha}{2}}_{0,025}}}},\ \sqrt{\frac{S^2(n-1)}{\chi^2_{80,\underbrace{1-\frac{\alpha}{2}}_{0.975}}}}\right] = \left[\sqrt{\frac{161,31}{106,63}},\ \sqrt{\frac{161,31}{57,15}}\right] =$$

$$= \boxed{[1,23, 1,68] = IC_{0.95}(\sigma)}$$

c) la proporción poblacional de telas con elongación superior a 8,4

$\hat{p} = 1/3$

$$IC_{0.95}(p) = \left[\hat{p} - \underbrace{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}_{0,975} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\ \hat{p} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right] =$$

$$= \left[\frac{1}{3} - 1,96\sqrt{\frac{1/3 \cdot 2/3}{81}},\ \frac{1}{3} + 1,96\sqrt{\frac{1/3 \cdot 2/3}{81}}\right] = \boxed{[0,2307, 0,436] = IC_{0.95}(p)}$$

27) Un artículo sobre "Evaluaciones de neumáticos bajo condición de esfuerzo" reporta que, de una m.a. de 350 neumáticos, 54 mostraron daños severos, 48 manchas y 16 ambos tipos de defectos.

a) Calcular un intervalo de confianza del 99% para la proporción de neumáticos con algún defecto

$n = 350$ $\quad X_i$: "el i-ésimo neumático tiene daños severos" $i \in [1, 54]$ $\quad X_i \sim Be(p_x)$

$1-\alpha = 0.99$ $\quad Y_i$: "el i-ésimo neumático tiene manchas" $i \in [1, 48]$ $\quad Y_i \sim Be(p_y)$

$\boxed{1-\frac{\alpha}{2} = 0.995}$ $\quad W_i$: "el i-ésimo neumático tiene 2 defectos" $\quad W_i \sim Be(p_w)$

$\hat{p}_x = \frac{54}{350} = 0,1543 \qquad \hat{p}_y = \frac{48}{350} = 0,1371 \qquad \hat{p}_w = \frac{16}{350} = 0,046$

$$\hat{p}_{x \cup y} = \frac{54+48-16}{350} = \boxed{0,2457 = \hat{p}_a}$$

$$IC_{0.99}(p_a) = \left[\hat{p}_a - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}_a(1-\hat{p}_a)}{n}}, \hat{p}_a + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}_a(1-\hat{p}_a)}{n}}\right] =$$

$$= \left[0,2457 - \overset{2,575}{z_{0.995}} \sqrt{\frac{0,2457(0,7543)}{350}}, 0,2457 + 2,575 \sqrt{\frac{0,1853}{350}}\right] =$$

$$= \boxed{\left[0,1864 , 0,305\right] = IC_{0,99}(p)}$$

b) Calcular un intervalo de confianza del 95% para la proporción de neumáticos con más de un defecto

$\hat{p}_b = \hat{p}_w = 0,046 \qquad 1-\alpha = 0.95 \rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0.975, z_{0975} = 1,96$

$$IC_{095}(p_b) = \left[\hat{p}_b - z_{0975} \sqrt{\frac{\hat{p}_b(1-\hat{p}_b)}{n}}, \hat{p}_b + z_{0975} \sqrt{\frac{\hat{p}_b(1-\hat{p}_b)}{n}}\right] =$$

$$= \left[0,046 - 1,96 \sqrt{\frac{0,046 \times 0.954}{350}}, 0,046 + 1,96 \sqrt{\frac{0,0439}{350}}\right] =$$

$$= \boxed{\left[0,02 , 0,068\right] = IC_{095}(p_b)}$$

c) Calcular un IC al 95% para la prop. de neumáticos con un único defecto

$\hat{p}_c = \frac{54+48-16-16}{350} = 0,2 \qquad 1-\alpha = 0,95 \rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0,975 \rightarrow z = 1,96$

$$IC_{095}(p_c) = \left[0,2 - 1,96 \sqrt{\frac{0,2 \times 0,8}{350}}, 0,2 + 1,96 \sqrt{\frac{0,2 \times 0,8}{350}}\right] = \boxed{\left[0,1581 , 0.2419\right] = IC_{095}(p_c)}$$

PyE

Estimación

(28) Considere las sig. muestras de contenido de grasa (en porcentaje) de salchichas seleccionadas al azar de dos marcas A y B:

X	A	25,2	21,3	22,8	17	29,8	21	25,5	16	20,9	19,5
Y	B	24,2	20,7	21	18,9	29,1	20,5	25,2	16,3		

Si se supone que los porcentajes de grasa de ambas marcas tienen distribución normal:

a) Hallar un $IC_{0{,}95}$ para la diferencia entre los contenidos medios de grasa de las dos marcas

$\frac{\alpha}{2} = 0{,}025$

$1-\alpha = 0{,}95 \rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0{,}975$

$X \sim N(\mu_A, \sigma_A)$ $\quad$ $Y \sim N(\mu_B, \sigma_B)$

$\bar{X}_A = 21{,}9$ $\quad S_A = 4{,}134$ $\quad \bar{Y} = 21{,}9875$ $\quad S_B = 4{,}009$

$n = 10$ $\quad m = 8$

como n y m son $<30 \rightarrow$ supongo $\sigma_A = \sigma_B$ (desconocido)

$$\bar{X}-\bar{Y} \sim N\left(\mu_A-\mu_B, \sigma\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}\right) \rightarrow \bar{X}-\bar{Y} \sim N\left(\mu_A-\mu_B, \sigma \underbrace{\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{1}{8}}}_{0{,}474}\right)$$

$$\hat{\sigma}^2 = S_p^2 = \frac{(n-1)S_A^2 + (m-1)S_B^2}{n+m-2}$$

$$\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_A-\mu_B)}{S_p\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{1}{8}}} \sim \underbrace{t_{n+m-2}}_{t_{16}}$$

$$IC_{0{,}95}(\mu_A-\mu_B) = \left[\bar{x}-\bar{y}-t_{16,\,0{,}025}\cdot S_p\sqrt{\frac{18}{80}}\ ,\ \bar{x}-\bar{y}+t_{16,\,0{,}025}\, S_p\sqrt{\frac{18}{80}}\right]$$

$$S_p = \sqrt{\frac{9\,S_A^2 + 7\,S_B^2}{16}} = \frac{1}{4}\sqrt{9\cdot 17{,}09 + 7\cdot 16{,}07} = \boxed{4{,}08 = S_p}$$

$$\rightarrow IC_{0{,}95}(\mu_A-\mu_B) = \left[21{,}9-21{,}9875-2{,}120\times 4{,}08\sqrt{\frac{18}{80}}\ ,\ 21{,}9-21{,}9875+2{,}12\times 4{,}08\sqrt{\frac{18}{80}}\right] =$$

$$= \boxed{[-4{,}19\ ;\ 4{,}02] = IC_{0{,}95}(\mu_A-\mu_B)}\ ✓$$

b) ¿Es necesario pedir el cumplimiento de alguna otra condición?

Independencia y varianzas iguales

c) Si se conoce que el desvío estándar poblacional del contenido de grasa de la primera marca es de 2,8 gr. mientras que el de la segunda es de 2,3 gr. construir nuevamente el intervalo pedido en a)

$\sigma_A = 2,8 \qquad \sigma_B = 2,3$

$$IC_{0,95}(\mu_A - \mu_B) = \left[\bar{X} - \bar{Y} - z_{0,975}\sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n} + \frac{\sigma_B^2}{m}} \, , \, \bar{X} - \bar{Y} + z_{0,975}\sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n} + \frac{\sigma_B^2}{m}}\right] =$$

$$= \left[21,9 - 21,9875 - 1,96\sqrt{\frac{2,8^2}{10} + \frac{2,3^2}{8}} \, ; \, 21,9 - 21,9875 + 1,96\sqrt{\frac{2,8^2}{10} + \frac{2,3^2}{8}}\right] =$$

$$= \boxed{[-2,44 \, ; \, 2,27] = IC_{0,95}(\mu_A - \mu_B)} \checkmark$$

Estimación

PyE

(29) Se tomaron dos m.a. de 1000 individuos de cap. fed y 1500 de la provincia de Bs. As. y se los encuestó respecto a si acuerda con la construcción de bicisendas en su barrio o localidad. Como resultado de la encuesta, 400 de los individuos de cap. fed manifestaron estar de acuerdo mientras que 900 de la prov. de Bs. As. acuerdan con la movida

a) Hallar un IC nivel asintótico 95% para la diferencia de proporciones de acuerdo con la bicisendas en las dos poblaciones.

$n = 1000 \qquad m = 1500 \qquad n, m > 30 \rightarrow TCL \qquad 1-\alpha = 0.95$

$1-\frac{\alpha}{2} = 0.975$

$\hat{p}_1 = \frac{400}{1000} \rightarrow \boxed{p_1 = 0,4} \qquad \hat{p}_2 = \frac{900}{1500} \rightarrow \boxed{p_2 = 0.6}$

$z_{0975} = 1,96$

$$IC_{\substack{0.95\\ aprox}}(\hat{p}_2 - \hat{p}_1) = \left[\hat{p}_2 - \hat{p}_1 - z_{0975}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{m}} ; \hat{p}_2 - \hat{p}_1 + z_{0975}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{m}}\right]$$

$$= \left[0,6 - 0,4 - 1,96\sqrt{\frac{0,4(0,6)}{1000} + \frac{0,6(0,4)}{1500}} ; 0,6 - 0,4 + 1,96\sqrt{\frac{0,4 \times 0,6}{1000} + \frac{0,6 \times 0,4}{1500}}\right] =$$

$$\boxed{= [\ 0,1608 \ ; \ 0,2392\ ] = IC_{ap.\,0.95}(p_1 - p_2)}$$

b) ¿En cuánto se reduce la long. del intervalo si se considera una confianza del 90%?

$$IC_{\substack{0.90\\ aprox}}(\hat{p}_2 - \hat{p}_1) = \left[\hat{p}_2 - \hat{p}_1 - z_{0,95}\sqrt{\frac{0,24}{1000} + \frac{0,24}{1500}} , \hat{p}_2 - \hat{p}_1 + z_{095}\sqrt{\frac{0,24}{1000} + \frac{0,24}{1500}}\right] =$$

$$= \left[0,6 - 0,4 - 1,645\sqrt{\frac{1}{2500}} , 0,6 - 0,4 + 1,645 \cdot \frac{1}{50}\right] =$$

$$\boxed{= [\ 0,1671 \ ; \ 0,2329\ ] = IC_{090}(\hat{p}_2 - \hat{p}_1)}$$

$\left.\begin{array}{l} \text{long } IC_{095} = 0,0784 \\ \text{long } IC_{090} = 0,0658 \end{array}\right\} \boxed{\text{Se reduce } 16,07\%}$

(30) Se piensa que la concentración del ingrediente activo de un antibiótico es afectada por el tipo de instrumental utilizado en el proceso de fabricación. Se sabe que la desviación estándar de la concentración del ingrediente activo es de 3 g/l indep. del tipo de instrumental empleado en su producción. Se realizan 10 obs. de una muestra de un antibiótico con cada uno de los equipos disponibles y se obtienen los sig datos:

Equipo 1	57,9	66,2	65,4	65,4	65,2	62,6	67,6	63,7	67,2	71,0
Equipo 2	65,4	70,7	70,1	69,3	63,8	68,6	68,6	69,4	65,3	68,8

a) Encontrar un intervalo de confianza del 95% para la diferencia entre los valores medios de las concentraciones logradas por cada uno de los equipos

$X_i \rightarrow$ equipo 1 $\quad n = 10 \quad \bar{X} = 65{,}22 \quad S_A : 3{,}44 \quad X_i \sim N(\mu_A, 3)$

$Y_i \rightarrow$ equipo 2 $\quad m = 10 \quad \bar{Y} = 68{,}0 \quad S_B : 2{,}32 \quad Y_i \sim N(\mu_B, 3)$

$1-\alpha = 0{,}95 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0{,}025 \quad 1-\frac{\alpha}{2} = 0{,}975 \quad z_{0975} \quad \sigma = 3$

$$IC_{095}(\mu_B-\mu_A) = \left[\bar{Y}-\bar{X} - z_{0975}\,\sigma\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}\,,\ \bar{Y}-\bar{X} + z_{0975}\,\sigma\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}\right] =$$

$$= \left[68 - 65{,}22 - 1{,}96\times 3\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{1}{10}}\,;\ 68-65{,}22 + 1{,}96\times 3\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{1}{10}}\right] =$$

$$= \boxed{[0{,}15\ ;\ 5{,}41] = IC_{095}(\mu_B - \mu_A)} \checkmark$$

b) Considerar ahora la dispersión poblacional desconocida pero igual para ambos equipos.

$$S_p^2 = \frac{(n-1)S_A^2 + (m-1)S_B^2}{n+m-2} = \frac{9\times 11{,}864 + 9\times 5{,}382}{18} = \boxed{8{,}623 = S_p^2}$$

$S_p = 2{,}936$

$$IC_{095}(\mu_B-\mu_A) = \left[\bar{Y}-\bar{X} - t_{n+m-2,\frac{\alpha}{2}}\cdot S_p\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}\,;\ \bar{Y}-\bar{X} + t_{n+m-2,\frac{\alpha}{2}}\cdot S_p\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}\right] =$$

$$= \left[68 - 65{,}22 - \overbrace{t_{18,\,0.025}}^{2,101}\cdot 2{,}936\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{1}{10}}\,,\ 68-65{,}22 + t_{18,\,0.025}\cdot 2{,}936\sqrt{\frac{2}{10}}\right] =$$

$$= \boxed{[0{,}02\ ;\ 5{,}54] = IC_{095}(\mu_B - \mu_A)} \checkmark$$

Estimación

PyE

UTN

(31) Se desea estimar el porcentaje de vuelos demorados en Aeroparque. Las líneas de interés para el estudio son Golazo y LAP. En un determinado mes se seleccionan al azar 100 vuelos de la primera y 121 de la segunda. Resultaron 20 demoras en Golazo y 28 demoras en LAP. Se construyó un intervalo de confianza (LAP − Golazo) para la diferencia de proporción siendo su límite superior 0,1605. Hallar el nivel de confianza utilizado

X: Golazo : $n = 100$ $\qquad X_i \sim Be(p_1)$ $\qquad \hat{p}_1 = \frac{20}{100} = 0{,}2$

Y: LAP $\quad m = 121$ $\qquad Y_i \sim Be(p_2)$ $\qquad \hat{p}_2 = \frac{28}{121} = 0{,}23$

$$IC_{approx(1-\alpha)}(p_2 - p_1) = \left[\hat{p}_2 - \hat{p}_1 - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{m}} \; ; \right.$$

$$\left. \hat{p}_2 - \hat{p}_1 + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{m}}\right] =$$

$$= \left[0{,}23 - 0{,}2 - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{0{,}2 \times 0{,}8}{100} + \frac{0{,}23 \times 0{,}77}{121}} \; ; 0{,}03 + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{0{,}00306}\right] =$$

$$= \left[0{,}03 - z_{(1-\frac{\alpha}{2})} \cdot 0{,}05535 \; ; 0{,}03 + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot 0{,}05535\right] =$$

$$= [\; \dots\; ; 0{,}1605]$$

$$\rightarrow 0{,}03 + z_{(1-\frac{\alpha}{2})} \cdot 0{,}05535 = 0{,}1605$$

$$z_{(1-\frac{\alpha}{2})} \, 0{,}05535 = 0{,}1605 - 0{,}03$$

$$z_{(1-\frac{\alpha}{2})} = \frac{0{,}1305}{0{,}05535} = 2{,}3577 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}99081$$

$$\frac{\alpha}{2} = 0{,}00919$$

$$\alpha = 0{,}018 \cong 0{,}02$$

$$\boxed{1 - \alpha = 0{,}98}$$